第27卷 第1期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 1
2010年02月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0139-06

捕食-被捕食二维Lotka-Volterra模型的β持续生存与β绝灭*

阎慧臻[1]， 马知恩[2]， 刘 燕[1]

(1- 大连工业大学信息科学与工程学院，大连 116034； 2- 西安交通大学数学系，西安 710049)

摘 要: 利用极限理论与延拓方法，研究了捕食-被捕食二维Lotka-Volterra模型在有限时间内的持续生存与绝灭问题，即β持续生存与β绝灭问题。所得结论表明：种群的β持续生存和β绝灭与种群的初始数量有关。在一定条件下，只要控制食饵种群与捕食种群的初始数量在一定范围内，即可保证两种群永远β持续生存。

关键词: 捕食-被捕食模型；β持续生存；β绝灭

分类号: **AMS**(2000) 92B05 **中图分类号**: O29; Q141 **文献标识码**: A

1 引言

对于由Logistic方程所描述的一维种群模型和由二维Lotka-Volterra方程所描述的两种群模型，由解的唯一性知：从任一正初始值出发的解都不可能在有限时间内变为零，反映在生物学上即表示种群不可能在有限时间内绝灭。但在实际中，如果环境中毒素浓度很大，或种群的数量少于一定的限度，种群就将无法生存而很快地绝灭。因此，有必要研究种群在有限时间内的持续生存与绝灭问题，即β持续生存与β绝灭问题[1-3]。本文研究了捕食-被捕食二维Lotka-Volterra模型的β持续生存与β绝灭的问题，给出了β持续生存与β绝灭的一些充分条件。

2 定义及引理

定义1 对于给定常数$\beta>0$，如果当$0\le t<T$ $(0<T\le+\infty)$时，有

$$x(t)>\beta,\quad \lim_{t\to T^-}x(t)=\beta,$$

则称种群$x(t)$于时刻T在种群水平β上走向绝灭，或称β绝灭；如果种群$x(t)$在$[0,T]$上的任一时刻均不β绝灭，则称种群$x(t)$于$[0,T]$上在种群水平β上持续生存，或称β生存。

考虑如下两种群Lotka-Volterra模型

$$(M)\quad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1(r_{11}-a_{11}x_1-a_{12}x_2)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2(r_{21}-a_{21}x_1-a_{22}x_2)\end{cases}\tag{1}$$

收稿日期: 2008-06-06. **作者简介**: 阎慧臻(1965年11月生)，女，博士，教授. 研究方向：生物数学.
***基金项目**: 辽宁省教育厅科技研究项目(2009A075).

其中 $a_{11}>0$, $a_{22}>0$，即种群 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 均为密度制约的。当参数 $a_{12}>0$, $a_{21}<0$ 时，称模型 (M) 为捕食-被捕食系统(并假设 $r_{11}>0$, $r_{21}<0$，即捕食者 $x_2(t)$ 仅以食饵 $x_1(t)$ 为食)。

为书写方便，引入以下记号：记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad \Delta=\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_1=a_{22}r_{11}-a_{12}r_{21},\quad \Delta_2=a_{11}r_{21}-a_{21}r_{11},\quad \langle x\rangle=\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s,$$

$$\langle x\rangle_*=\varliminf_{t\to\infty}\langle x\rangle=\liminf_{t\to\infty}\langle x\rangle,\quad \langle x\rangle^*=\varlimsup_{t\to\infty}\langle x\rangle=\limsup_{t\to\infty}\langle x\rangle.$$

并假设 $\Delta>0$, $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$，即假设模型 (M) 中的 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 是永久持续生存的[4]。

引理 1[4] 捕食-被捕食系统 (M) 从第一象限出发的解均有界，且最终一致有界。

3 主要结果

定理 1 考虑捕食-被捕食系统 (M)。

1) 对于食饵种群 $x_1(t)$，当 $\beta<\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}\geq 0$ 时，若

$$\beta<x_1(0)\leq\frac{\Delta_1-a_{11}a_{22}\beta}{-a_{21}a_{12}},\quad \frac{r_{11}}{a_{12}}+\frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta-\Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}\leq x_2(0)\leq\frac{r_{11}-a_{11}\beta}{a_{12}},$$

则 $x_1(t)$ 永远 β 持续生存。

2) 对于捕食种群 $x_2(t)$，当 $\beta<\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}\geq 0$ 时，若

$$\frac{a_{22}\beta-r_{21}}{-a_{21}}\leq x_1(0)\leq\frac{r_{21}}{a_{21}}+\frac{a_{22}(\Delta_2-a_{11}a_{22}\beta)}{a_{12}a_{21}^2},\quad \beta<x_2(0)\leq\frac{\Delta_2-a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}},$$

则 $x_2(t)$ 永远 β 持续生存。

证明 1) 由

$$\Delta_2>0\Rightarrow\frac{\Delta_1}{\Delta}<\frac{r_{11}}{a_{11}},$$

所以 $\beta<\frac{r_{11}}{a_{11}}$；由

$$\Delta>a_{11}a_{22}\Rightarrow\frac{\Delta_1}{\Delta}<\frac{\Delta_1}{a_{11}a_{22}},$$

所以 $\beta<\frac{\Delta_1}{a_{11}a_{22}}$。

(I) 考虑

$$\frac{r_{11}}{a_{12}}+\frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta-\Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}>0$$

时，(i) 首先证明如下命题。若

$$\beta<x_1(T)\leq\frac{\Delta_1-a_{11}a_{22}\beta}{-a_{21}a_{12}},\quad \frac{r_{11}}{a_{12}}+\frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta-\Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}\leq x_2(T)\leq\frac{r_{11}-a_{11}\beta}{a_{12}},$$

则存在 $\delta>0$，使得 $t\in[T,T+\delta]$ 时，上面的式子也成立。

因为 $x_1(T) > \beta$，所以存在 $\delta_1 > 0$，使得 $t \in [T, T+\delta_1]$ 时，$x_1(t) > \beta$。若

$$x_2(T) > \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}},$$

则存在 $0 < \delta < \delta_1$，使得 $t \in [T, T+\delta]$ 时

$$x_2(t) \geq \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}.$$

若

$$x_2(T) = \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}},$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=T} &= x_2(T)\Big\{r_{21} - a_{21}x_1(T) - a_{22}\Big[\frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}\Big]\Big\} \\ &> x_2(T)\Big\{r_{21} - a_{21}\beta - a_{22}\Big[\frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}\Big]\Big\} \\ &= x_2(T)\cdot\frac{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}{-a_{12}^2a_{21}}\cdot(\Delta_1 - \Delta\beta) \geq 0.\end{aligned}$$

所以存在 $\delta > 0$ $(\delta < \delta_1)$，使得 $t \in [T, T+\delta]$ 时

$$x_2(t) \geq \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}.$$

所以在 $[T, T+\delta]$ 上可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &\leq x_1\Big\{r_{11} - a_{11}x_1 - a_{12}\Big[\frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}\Big]\Big\} \\ &= a_{11}x_1\Big(\frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}} - x_1\Big),\end{aligned}$$

又因为

$$x_1(T) \leq \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}},$$

所以由微分方程比较定理[5]知

$$x_1(t) \leq \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}},$$

所以可得

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \leq x_2\Big\{r_{21} - a_{21}\cdot\frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}} - a_{22}x_2\Big\} = a_{22}x_2\Big(\frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}} - x_2\Big),$$

因为

$$x_2(T) \leq \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}},$$

所以

$$x_2(t) \leq \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}}.$$

(ii) 证明 (i) 中式子可无限延拓下去。否则，设 (i) 中式子仅能延拓到某个开区间 $[0,\eta)$ 上，且由 (i) 的证明知

$$x_1(\eta)=\beta,\quad x_2(\eta)\le\frac{r_{11}-a_{11}\beta}{a_{12}},$$

所以在 $[0,\eta]$ 上可得

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\ge x_1\Big(r_{11}-a_{11}x_1-a_{12}\cdot\frac{r_{11}-a_{11}\beta}{a_{12}}\Big)=a_{11}x_1(\beta-x_1),$$

又因为 $x_1(0)>\beta$，所以 $x_1(t)>\beta$, $t\in[0,\eta]$，则有 $x_1(\eta)>\beta$。矛盾！

由 (i) 和 (ii) 的证明知 $x_1(t)$ 永远 β 持续生存。

(II) 考虑

$$\frac{r_{11}}{a_{12}}+\frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta-\Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}\le 0$$

时，此时对任意的 $t\in[0,+\infty)$

$$x_2(t)\ge\frac{r_{11}}{a_{12}}+\frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta-\Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}$$

显然成立，所以在 $[0,+\infty)$ 上可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}&\le x_1\Big\{r_{11}-a_{11}x_1-a_{12}\Big[\frac{r_{11}}{a_{12}}+\frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta-\Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}\Big]\Big\}\\&=a_{11}x_1\Big(\frac{\Delta_1-a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}}-x_1\Big).\end{aligned}$$

又因为

$$x_1(0)\le\frac{\Delta_1-a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}},$$

所以由比较定理知

$$x_1(t)\le\frac{\Delta_1-a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}},$$

所以可得

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\le a_{22}x_2\Big(\frac{r_{11}-a_{11}\beta}{a_{12}}-x_2\Big).$$

因为

$$x_2(0)\le\frac{r_{11}-a_{11}\beta}{a_{12}},$$

所以

$$x_2(t)\le\frac{r_{11}-a_{11}\beta}{a_{12}},$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\ge a_{11}x_1(\beta-x_1).$$

又因为 $x_1(0)>\beta$，所以 $x_1(t)>\beta$, $t\in[0,+\infty)$。即：$x_1(t)$ 永远 β 持续生存。

2) 的证明与 1) 类似 (略)。

定理 2 考虑捕食-被捕食系统 (M)。

1) 若 $\beta>\frac{\Delta_1}{\Delta}$，则 $x_1(t)$ 在有限时间内 β 绝灭。

2)　当 $a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}\geq 0$ 时，若 $\beta>\frac{\Delta_2}{\Delta}$，则 $x_2(t)$ 在有限时间内 β 绝灭。

证明　1)　利用反证法。假设 $t\in[0,+\infty)$ 时，$x_1(t)>\beta$，则

$$\varlimsup_{t\to+\infty} x_1(t)\geq\beta>0.$$

再由引理 1 知 $x_1(t)$ 有界，所以

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\ln x_1(t)-\ln x_1(0)}{t}=0.$$

把式 (1) 变形得

$$\frac{\ln x_1(t)-\ln x_1(0)}{t}=r_{11}-a_{11}\langle x_1\rangle-a_{12}\langle x_2\rangle, \tag{2}$$

$$\frac{\ln x_2(t)-\ln x_2(0)}{t}=r_{21}-a_{21}\langle x_1\rangle-a_{22}\langle x_2\rangle. \tag{3}$$

用式 (2) 乘以 $(-a_{22})$ 并加上式 (3) 乘以 a_{12}，得

$$a_{12}\cdot\frac{\ln x_2(t)-\ln x_2(0)}{t}-a_{22}\cdot\frac{\ln x_1(t)-\ln x_1(0)}{t}=\Delta\cdot\langle x_1\rangle-\Delta_1. \tag{4}$$

因为

$$\begin{aligned}&\varliminf_{t\to+\infty}\left[a_{12}\cdot\frac{\ln x_2(t)-\ln x_2(0)}{t}-a_{22}\cdot\frac{\ln x_1(t)-\ln x_1(0)}{t}\right]\\ \leq\ & a_{12}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\ln x_2(t)-\ln x_2(0)}{t}-a_{22}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\ln x_1(t)-\ln x_1(0)}{t}\\ =\ & a_{12}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\ln x_2(t)-\ln x_2(0)}{t}\leq 0,\end{aligned}$$

所以对 (4) 式两边取极限得

$$0\geq\varliminf_{t\to+\infty}(\Delta\cdot\langle x_1(t)\rangle-\Delta_1)=\Delta\cdot\varliminf_{t\to+\infty}\langle x_1(t)\rangle-\Delta_1\geq\Delta\cdot\beta-\Delta_1,$$

即 $\beta\leq\frac{\Delta_1}{\Delta}$，矛盾！故 $x_1(t)$ 在有限时间内 β 绝灭。

2) 的证明类似于文 [4] 定理的证明 (略)。

4　对定理结论的一些解释

由定理 1、定理 2 的结论可知，当 $\beta<\frac{\Delta_i}{\Delta}$ $(i=1,2)$ 时，只要限定种群 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 的初始数量 $x_1(0)$, $x_2(0)$ 在一定的范围内 (不能太大，也不能太小)，即可保证种群 $x_i(t)$ 永远 β 持续生存。这与实际情形是相符的，我们作如下分析。

对于食饵种群 $x_1(t)$，若初始数量 $x_1(0)$ 太小，显然无法保证 $x_1(t)$ 永远 β 持续生存。但由于捕食种群 $x_2(t)$ 以食饵种群 $x_1(t)$ 为食物来源，因此若 $x_1(0)$ 太大，会使捕食种群 $x_2(t)$ 生长过快，从而导致食饵种群 $x_1(t)\beta$ 的绝灭；同样，若捕食种群的初始数量 $x_2(0)$ 太大，显然会使食饵种群 $x_1(t)$ 很快 β 绝灭。但若 $x_2(0)$ 太小，则会使食饵种群 $x_1(t)$ 生长过快，从而导致捕食种群 $x_2(t)$ 生长过快，这又进一步会导致 $x_1(t)$ 会迅速 β 绝灭。因此，只有当 $x_1(0)$, $x_2(0)$ 都限定在一定范围内时，才能使食饵种群 $x_1(t)$ 永远 β 持续生存。

对于捕食种群$x_2(t)$，若食饵种群的初始数量$x_1(0)$太小，则显然无法保证$x_2(t)\beta$的持续生存，但若$x_1(0)$太大，会使捕食种群$x_2(t)$生长太快，从而导致食饵种群$x_1(t)\beta$的绝灭，这又进一步使捕食种群$x_2(t)\beta$发生绝灭；同样，若捕食种群的初始数量$x_2(0)$太小，则显然无法保证$x_2(t)\beta$的持续生存，但若$x_2(0)$太大，会使食饵种群$x_1(t)\beta$发生绝灭，从而导致捕食种群$x_2(t)\beta$的绝灭。因此，只有当$x_1(0)$, $x_2(0)$都限定在一定范围内时，才能使捕食种群$x_2(t)$永远β持续生存。

参考文献：

[1] Hallam T G, Ma Z E. On density and extinction in continuous population model[J]. J Math Biol, 1987, 25: 191-201

[2] Ma Z E, Cui G R, Wang W D. Persistence and extinction of a population in a polluted environment[J]. Math Biosci, 1990, 101: 75-97

[3] Yan H Z, Ma Z E. Persistence and extinction of an individual in a polluted environment[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(1): 145-156

[4] Liu H P, Ma Z E. The threshold between persistence and extinction of two species communities in a polluted environment[J]. J Math Biol, 1991, 30: 49-61

[5] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社，2001
Ma Z E, Zhou Y C. Qualitative and Stability Methods of Ordinary Differential Equations[M]. Beijing: Science Press, 2001

β Persistence and β Extinction of a Predator-prey Lotka-Volterra Model of Two Species

YAN Hui-zhen[1], MA Zhi-en[2], LIU Yan[1]

(1- College of Informational Science and Engineering, Dalian Polytechnic University, Dalian 116034;
2- Department of Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: By using the limit theory and extension method, this paper studies the persistence and the extinction of a two-dimensional predator-prey Lotka-Volterra model in finite time. Namely, there are the β persistence and the β extinction of populations. It is discovered that the β persistence and the β extinction of populations are relevant to the initial quantity of populations. Under some conditions, the predator and the prey are β persistent in any finite time if the initial quantity of the two populations is limited within certain range.

Keywords: predator-prey model; β persistence; β extinction

Received: 06 June 2008. **Accepted:** 26 Feb 2009.

Foundation item: The Liaoning Provincial Department of Education Research Project (2009A075).